Ασκησεις

7/11/19

(1) Έστω $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής. Νδο κάθε λύση της ομογενούς Δ.Ε. $y'=p(t)y(t)$ με $t\in[a,b]$ είναι:

$$y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$$

οπου c σταθερά.

Απ. :(1): Καθε λύση $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$, είναι λύση της $y'=py \Rightarrow y'-py=0 \Rightarrow ce^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t p(s)ds\right)'-p(t)ce^{\int_a^t p(s)ds}=0$

$$\Rightarrow cp(t)e^{\int_a^t p(s)ds}-cp(t)e^{\int_a^t p(s)ds}=0$$, ισχύει

(2) Έστω y λύση της Δ.Ε. Θεωρούμε την συναρτηση:

$$u(t)=y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}$$

Θέλω νδο. $u'(t)=0$:

$$u'(t)=y'e^{-\int_a^t p(s)ds}+ye^{-\int_a^t p(s)ds}\Big(\overbrace{-\int_a^t p(s)ds}^{p(s)}\Big)'\Rightarrow$$

$$u'(t)=(\underbrace{y'-py}_{=0})e^{-\int_a^t p(s)ds}\Rightarrow u'(t)=0\Rightarrow u(t)=C \text{ : σταθερά}$$

Άρα πραγματι η λύση είναι η $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$.

(2) Ασκ. : Θεωρουμε το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'=y^2 & ,\ t\in[0,2] \\ y(0)=1 \end{cases}$

Ελέγξτε αν το Θ. τοπ. Υ κ Μ. λυσεων για ΣΔΕ εξασφ. Υ κ Μ λύσεων του Π.Α.Τ. τοπ. σ' ενα διαστημα $[\alpha,\ddot{b}]$
Επειδή η f ικανοποιεί την συνθηκη Lipschitz ως προς y σε οποιοδηποτε διαστημα $[1-c,1+c]$ μελετησε την b' ως προς C

Απ. Παρατηρώ ότι αν πάρω την παράγωγο της $f(t,y) = y^2$, ως προς y : $f_y = 2y$ $|f_y| \to +\infty$, $y \to \pm\infty$

Δεν ικανοποιεί την ολική συνθ. Lipschitz, άρα θα πρέπει να δω τοπικά αν εφαρμ. το τοπικό Θ. Υ'Μ.

Από τοπικό θεωρ. Υ'Μ λύσεων για ΣΔΕ έχουμε ότι αφού:

(1) f συνεχής

(2) Η f είναι Lipschitz στο $[a,b] \times [1-c, 1+c]$

τότε υπάρχει λύση και είναι μον. τουλ. στο $[a, b']$.

όπου το $b' = \min\left(\overset{2}{b}, \overset{0}{a} + \frac{c}{A}\right)$, $A = \max\limits_{\substack{t \in [a,b] \\ y \in [1-c, 1+c]}} |f(t,y)| = \max|y^2| = (1+c)^2$ αφού $y \leq 1+c$

Άρα $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right)$

(1) $\frac{c}{(1+c)^2} \leq 2 \iff c \leq 2(1+c)^2 \iff \dots \iff 2c^2 + 3c + 2 \geq 0$

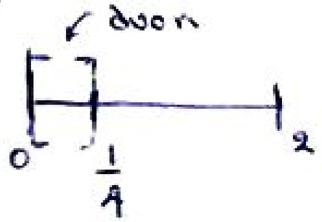
δηλ. $\Delta < 0$ άρα ισχύει $\forall c$.

άρα $b' = \frac{c}{(1+c)^2}$

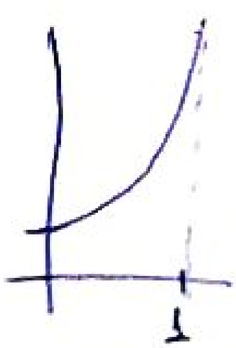
(2) Ζητάμε το $\max\limits_{c>0}\left(\frac{c}{(1+c)^2}\right)$: αρκεί να παραγ. & να δούμε πού μηδ. η παραγ.

$\left(\frac{c}{(1+c)^2}\right)' = \frac{1-c}{(1+c)^3}$, $1+c > 0$ γιατί $c > 0$ άρα $1 - c = 0$ $\Rightarrow c = 1$ για αυτή την τιμή μηδ. η παρ.

Δηλ. $b' = \frac{1}{4}$



$[0, \frac{1}{4}]$



Αριθμητικές Μέθοδοι

Η Μέθοδος του Euler

Έστω το:

$$\text{Π.Α.Τ.}: \begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

και θεωρούμε ότι έχει ακριβώς μια λύση.

Θεωρούμε ομοιόμορφο διάστημα του $[a,b]$.

Έστω η διάταξη:

$a = t^0 < t^1 < \dots t^n < \dots t^N = b$

N τμήματα

Οι αποστάσεις είναι ίσες

Θέτουμε: $h = \dfrac{b-a}{N}, N \in \mathbb{N}$

τότε $t^n = a + nh$, $n = 0,1,\dots,N$

Οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για ομοιομ. διαμέριση δηλ. οι y^n, $n = 1,2,\dots,N$ προσδιορίζονται από τον αναδρ. τύπο:

Θα υπολογίσουμε τα $y^0, y^1, y^2, \dots, y^N$ την προσεγγιστική δηλ. λύση αυτών των σημείων

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 1,\dots,N \\ y^0 = y_0, & \text{αρχικά δεδομένα} \end{cases}$$

Αυτή η μέθοδος είναι <u>μονοβηματική</u>:

Σύντομη μνήμη και θυμάται μόνο το προηγ. βήμα. Προχωράω ένα βήμα τη φορά.

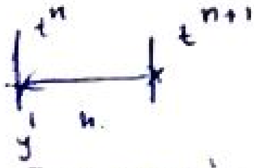
1ος τρόπος κατασκευής (του τύπου)

Αριθμητική Διαφόριση

$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$y'(t^n) \cong \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

δεν έχω πληροφορία στο



$$\Rightarrow \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = f(t^n, y(t^n))$$

οπότε δεν μπορώ να πάρω το άλλο.

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))$$

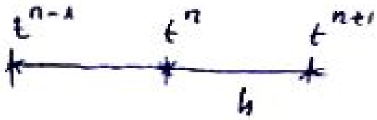
!!! Εδώ χρησιμ. εμπρόσθιες διαφορές

Αν έπαιρνα: $y'(t^n) \simeq \dfrac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}$

τότε θα είχα **οπίσθιες διαφορές**

Ενώ αν έχω: $y'(t^n) \simeq \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}$ δεν παίρνω το t^n αλλά τα άκρα του

τότε έχω **κεντρικές διαφορές**



(έχει διαφορά αν πάρω εμπρ. ή οπισθ. ή κεντ. γιατί καταλήγει σε άλλο αριθμητικό σχήμα)

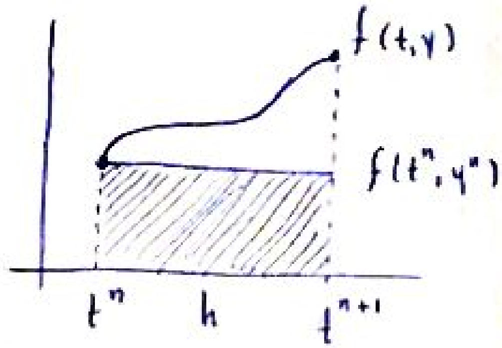
2ος τρόπος: Αριθμητική Ολοκλήρωση

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)) : \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$= h f(t^n, y^n) \Leftrightarrow$$

Υπολογίζω την f στο σημείο t^n



$$\Leftrightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = hf(t^n, y(t^n)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))}$$ ↓ εδώ έχω αναδρομικό τύπο

$$\boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}$$

↳ πεπλεγμένο, χρειάζεται εναρτησιακό υπολογισμό.

Για να το αντιμετωπίσω:

$$y^0 = y_0$$
$$y^1 = y_0 + hf(t^1, y^1)$$
$$y^2 = y^1 + hf(t^2, y^2)$$
$$\vdots$$
$$y^N = y^{N-1} + hf(t^N, y^N)$$

έχουμε δηλ: $Ax = b$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$

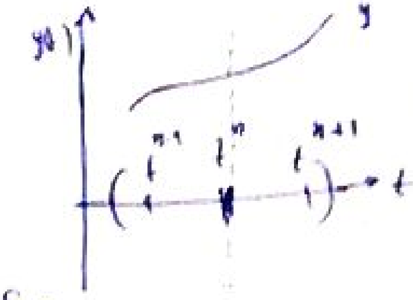
$A^{N \times N}$ τετραγ. πιν.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ix = A^{-1}b \\ &\quad x = A^{-1}b. \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{δύσκολη εφαρμογή}$$

καλύτερο είναι να θεωρήσω: $A = LU$ LU παραγοντοποίηση

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$ λιγότεροι υπολογισμοί.

$3^{ος}$ τρόπος : Ανάπτυγμα Taylor



$$y(t^{n+1})\Big|_{t^n} = y(t^n) + h\,y'(t^n) + O(h^2)$$

παίρνω 1ης τάξης

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

→ αυτό σημαίνει ότι από εδώ και πέρα το σφάλμα θα είναι h^2.

π.χ για $h=0.1$ το τοπικό σφάλμα θα είναι $O(h^2)=O(0,01)$ αυτή είναι η ακρίβεια της μεθόδου (2ης τάξης).

χρειάζεται $y', y'', \dots$ να είναι φραγμένες

Ορισμός

όπου "O", ονομάζεται "μεγάλο όμικρον του Landau" ή ασυμπτ. σύμβολο άνω φρ.

Γενικά ότι σε μια οριακή διαδικασία, $t \to t_0$ η $f(t) = O(g(t))$ σημαίνει ότι η $f(t)$ εκφράζεται ως γινόμενο της $g(t)$ επί μια φραγμένη συνάρτηση στην γειτονιά του t_0 (οριακού σημείου).

Συνέπεια της μεθόδου του Euler (Τοπικό σφάλμα)

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \left(\frac{h^2}{2!}\,y''(\xi^n)\right),\ \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

ακριβής λύση — προσεγγιστική λύση

Άρα το $\delta^n = \dfrac{h^2}{2!}\,y''(\xi^n) \to 0$ όταν το $h \to 0$

άρα να εκλεπτύνω το h.

Άρα η συνέπεια της Euler είναι τάξ 2 (ok?)

(το τοπ. σφάλμα ονομάζ. συνέπεια ενώ το ολικό σφάλμα λέγεται ακρίβεια).

Αντικαθιστούμε από Taylor χρειάζεται C^2 συνεχής ώστε η y'' φραγμ.

$$\delta^n = \left[y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \right] - \left[y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) \right]$$

$$= \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \, , \; y \in C^2([a,b])$$

<u>Ευστάθεια της μεθόδου Euler</u> ή άμεση Euler

Θα προσδιορίσουμε τα φράγματα για το ε^n της μεθόδου.

<u>Υπ.</u>: Ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz ως προς y.

$$\exists L \geq 0, \; \forall t \in [a,b], \; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(Θέλω να δω ευστάθεια στο διακριτό)

Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \quad t \in [a,b] \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^n, z^n) \\ z^0 = z_0 \quad , t \in [a,b] \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1 \; , \; h = \frac{b-a}{N} \; , \; t^n = a + nh \; , N \in \mathbb{N}$$

(αν ρωτήσει: δείξτε ότι η Euler δίνει σταθερές προσεγγίσεις)

↓ Αφαιρούμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \overset{\text{τριγ. ιδιοτ.}}{\leq} |y^n - z^n| + h|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)| \overset{\text{Lip.}}{\leq} |y^n - z^n| + Lh|y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + Lh)|y^n - z^n| \, , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

με επαγωγή: $|y^n - z^n| \le (1+Lh)^n |y^0 - z^0|$

$\le (1+Lh)(1+Lh)|y^{n-1} - z^{n-1}| \le (1+Lh)^3 |y^{n-2} - z^{n-2}| \le \dots$

(δε εχλεις η σταθερα να εξαρτάται απο το h).

ομως $1+Lh \le e^{Lh}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$|y^n - z^n| \le e^{Lhn} |y^0 - z^0| \le e^{LhN} |y^0 - z^0| \qquad \left(h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow Nh = b-a\right)$$

Τελικά:

$|y^n - z^n| \le e^{L(b-a)} |y^0 - z^0|$ ή

$$\max |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C} |y^0 - z^0| \quad \forall n$$

αρα η λύση είναι ευσταθής

Ακριβεια Της Μεθοδου

Θεωρημα (ολικό σφάλμα)

Έστω $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$, πληροί την συνθήκη του Lipschitz κ' $y \in C^2([a,b])$ είναι η λύση του ΠΑΤ. Αν y^n, $n = 0, 1, \dots, N$ είναι η προσ. που δίνει η μέθοδος Euler για $h = \frac{b-a}{N}$ στο $[a,b]$ τότε:

$$\max_{\forall n} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)h$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|$$

Παρατ.: Το ολ. σφάλμα της Euler είναι $O(h)$ τάξης 1.